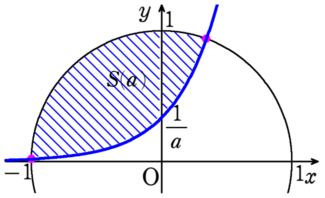
雑感　受験生のどんな力を見たいのか？

■　早稲田大 2018 年教育学部の問題．

a を正の実数とする．座標平面において不等式 $x^2+y^2 \leqq 1$ と不等式 $y \geqq \dfrac{e^{ax}}{a}$ の表す領域の共通部分の面積を $S(a)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} S(a)$ を求めよ．

■　$a=3$ の場合の領域を図示すると，下図のようになる．青斜線の領域の面積が問題の $S(a)$．



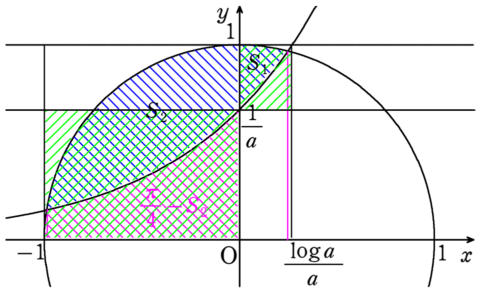
当然のことだが，ピンクで表示した共有点の座標を求めることはできまい．

実際，方程式 $x^2+\dfrac{e^{2ax}}{a^2}=1$ が代数的に解ける見通しはない．円周上の点を $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と表してみても方程式は $a\sin\theta=e^{a\cos\theta}$ であり，事情は同じである．

そうであれば，共有点の座標を文字に置くか？　そうして定積分の計算をする？？　やりたくないし，上手く行くかなあ．

これが lim のない問題ならそう言う方向も考えざるを得ないが…．

■　lim だから，少しくらいアバウトでも良いはずだ．挟み撃ちを考えるか．そのために，もう少し値などの書き込みをしてみる．ただ，a の値が大きいと図が極端になるから，小さめにした．



$S(a)$ のうち，$x \geqq 0$ の部分を S_1，$x \leqq 0$ の部分を S_2 とする．

$S(a)=S_1+S_2$ で，S_1，$\dfrac{\pi}{4}-S_2$ の部分を緑色の長方形で挟み込むと，

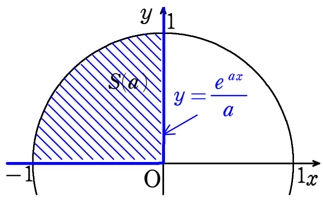
$0<S_1<\dfrac{\log a}{a}\cdot\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$，　$0<\dfrac{\pi}{4}-S_2<1\cdot\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{a}$ であるから，

$-\dfrac{1}{a}<S_1+S_2-\dfrac{\pi}{4}<\dfrac{\log a}{a}\cdot\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$ である．

ここで $a\to\infty$ とすると，$\dfrac{1}{a}\to 0$，$\dfrac{\log a}{a}\to 0$ であるから，

$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\left(S_1+S_2-\frac{\pi}{4}\right)=0$ より，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}S(a)=\frac{\pi}{4}$ となる．

■　『大学への数学』2019 年 2 月号では，「a を大きくしていくと曲線 $y=\dfrac{e^{ax}}{a}$ は x 軸の $x \leqq 0$ の部分と y 軸の $y \geqq 0$ の部分をつないだ折れ線に近づくので，答えは $x^2+y^2 \leqq 1$ の第 2 象限の面積に等しく $\pi/4$ であると予想され」ると書いている．図で表せば右上の通りである．



このことに気づけば，答えはすぐ分かるから「答案を作るときには，大雑把に考えてきちんと示すことがポイント」だと述べているが，きちんと示す記述のための挟み撃ちを考えるのは楽ではない．

■　ところが，調べてみるとこの問題は「答えだけ」を要求されている 5 題中の 1 題で，途中記述が不必要な客観問題だった．従って，上図さえ想像できれば，答えは一瞬にして求まるのだ．面倒な挟み撃ちなんか出題者は要求していなくて，直感だけを問うたのか．

当雑感 217 「この問題を客観問題で出題する感覚」で，同じく早稲田の教育の 2017 年の問題が，誤った安易な予想で安直に解いてしまっても（記述では全くの×だが）正解が出せてしまうことを取り上げた．

この問題はそれよりは幾分マシだとはいえ，出題者の感覚に改めて疑問符を付けざるを得ない．早稲田の教育学部は，受験生のどんな力を見ようとしているのだろうか．

2019 年 02 月 01 日