雑感　2 定直線への距離に関する軌跡

■　座標平面上の 2 定点からの距離に関する軌跡は，垂直 2 等分線，楕円，双曲線などで目新しいものではない．また，1 つの定点と 1 つの直線からの距離に関しては，2 次曲線の焦点，準線にかかわって，既知のよく知られた事実がある．

■　では，交わる 2 直線への距離に関してはどのような軌跡が生まれるのであろうか．

定直線を $l_1 : y = ax$，$l_2 : y = 0$，点 P$(x,\ y)$ から $l_1,\ l_2$ への距離をそれぞれ $d_1 = \dfrac{|ax - y|}{\sqrt{1+a^2}}$，$d_2 = |y|$ とすると次のような関係がある．なお，k は正の定数で，l_1 と l_2 のなす角の 2 等分線 $y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{a^2+1}}{a}x$ を $l_3,\ l_4$ としている．

(1)　$d_1 + d_2 = k$ のとき

2 点 A$\left(\dfrac{k}{a},\ k\right)$，B$\left(k\sqrt{1+\dfrac{1}{a^2}},\ 0\right)$ について，線分 AB を 1 辺とし，O を中心とする<u>長方形 C_1</u> で，このとき，OA=OB である．

(2)　$|d_1 - d_2| = k$ のとき

長方形 C_1 の辺を外部に延長した <u>4 つの折れ線 C_2</u> である．

(3)　$d_1 d_2 = k$ のとき

$l_1,\ l_2$ を漸近線，$l_3,\ l_4$ を軸とする<u>双曲線 C_3</u> で，軸との交点の y 座標は $\pm\sqrt{k}$ である．

(4)　$\dfrac{d_1}{d_2} = k$ のとき

傾きが $\dfrac{a}{1 \pm k\sqrt{a^2+1}}$ で，O を通る <u>2 直線 C_4</u> である．

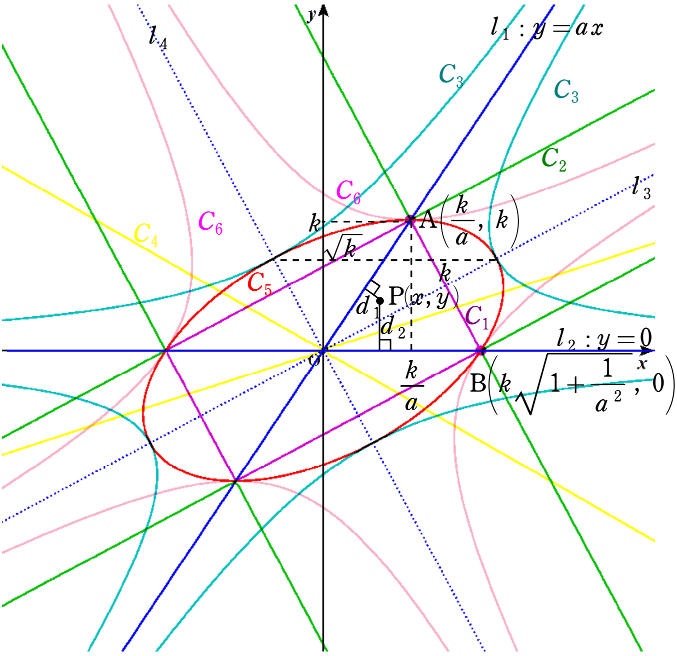
(5)　${d_1}^2 + {d_2}^2 = k^2$ のとき

長方形 C_1 の 4 頂点を通り，$l_3,\ l_4$ を軸とする<u>楕円 C_5</u> である．

(6)　$|{d_1}^2 - {d_2}^2| = k^2$ のとき

長方形 C_1 の 4 頂点を通り，$l_3,\ l_4$ を軸とする<u>直角双曲線 C_6</u> であり，楕円 C_5 と長方形 C_1 の 4 頂点で接する．なお，共通接線は $l_1,\ l_2$ と平行である．

■　計算や式は記さないが，図示すれば以下の通り．



2014 年 11 月 22 日