雑感　楕円体

■　2019 年の話題をさらったラグビーワールドカップ．にわかファンも激増して,「ONE TEAM」が 2019 年の「新語・流行語大賞」に選ばれた．

ラグビーボールは，回転楕円体をしていると言われる．厳密にはどうか知らないが，それに近いことは間違いない．

楕円体に関する話題をいくつか取り上げる．

■　知恵袋の質問から．

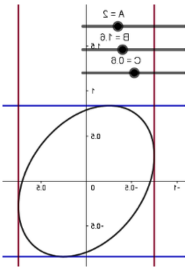
ある直方体と中心を同じとしていて，直方体内部に含まれる楕円体の条件はどのようにまとめられるでしょうか？

楕円体の式をいじっているのですが，綺麗なまとめ方が 思いつきません．何か簡単な方法を思いついたら教えてください．キレイにまとまるなら立方体でもよいです．

これに答える．

楕円体の軸が長方体の辺と平行であるなどといった特殊ケースではないということですね．こういった問題を考えるには，次元を 1 つ落として，まずは 2 次元の平面で考えてみることです．

$Ax^2+2Cxy+By^2=1$　…①　が楕円を表すとき，この楕円の存在範囲は，①を x の 2 次方程式と見たときの判別式 $D\geqq 0$ を考え，その中の $y^2\geqq 0$ から $|y|\leqq\sqrt{A/(AB-C^2)}$ が得られます．同様にして $|x|\leqq\sqrt{B/(AB-C^2)}$ となります．



この楕円が長方形 $|x|\leqq a,\ |y|\leqq b$ に含まれる条件は

$\sqrt{B/(AB-C^2)}\leqq a$ かつ $\sqrt{A/(AB-C^2)}\leqq b$ となります．

3 次元の楕円体でも同様に考えればよいと思います．

返答があって

ありがとうございます．

回答してくださった，「AB-C^2」が 2 次の行列式であることに注目して，対称行列の 2 次形式で表した楕円体について計算したところ，(対角成分の余因子)/(行列式)の√をとれば良さそうだと分かりました．

これは 2 次元の楕円でも同じとなりそうです．

なるほど，確かに楕円ではそうなっている．

■　もう 1 つ知恵袋の質問から．

大学 1 年　微積，極値の問題です．

点(x, y, z)が楕円体面 x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1 上を動くとき，関数 f=xyz の最大値と最小値を求めよ(a＞b＞c＞0)．という問題がわかりません．

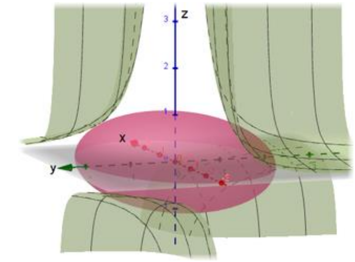
相加平均・相乗平均の関係を使えば，

$1=x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2\geqq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2/(a^2b^2c^2)}$　より $1\geqq 3\sqrt[3]{f^2/(a^2b^2c^2)}$．

よって，$(1/3)^3a^2b^2c^2\geqq f^2$ から

$-\sqrt{(1/3)^3}abc\leqq f\leqq\sqrt{(1/3)^3}abc$　より，

最大値 $\sqrt{(1/3)^3}abc$，最小値 $-\sqrt{(1/3)^3}abc$．



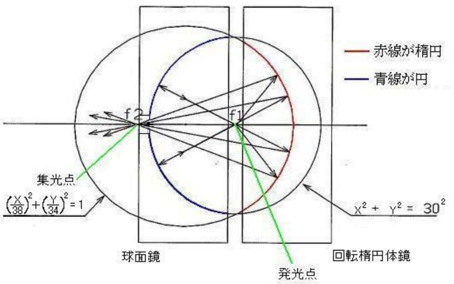
図のように，緑の曲面 $xyz=f$ が $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$ に接するとき図の接点で，f が最大となっている．

■　今年の SSH の課題研究で，ラグビー部員である S 君が取り組んだテーマは，「ラグビーボールの影の形状」である．ラグビーボールの外部の点からの光によって，床に置いたラグビーボールの影はどのようになるか？

球であれば円錐曲線であるが，回転楕円体ではどうなるかを調べた．

GeoGebra で光源から回転楕円体に接線を引き，それと床との交点の軌跡を図示して予想し，計算で確認をした．結論が 2 次曲線であるというのは予想通りだが，計算は楽ではない．

■　ネットで見つけたのは，「コンボミラー」．回転楕円体の一部と半球を合体させてできた鏡である．



断面は右の通り．焦点 f1 を出た光は右の赤い楕円部分で反射すると，別の焦点 f2 に集まる．左の円で反射した光は f1 に戻ったのち楕円で反射して，同じく f2 に集まる．これによりほとんどの光を集光できるようになったと書かれている．（国立天文台の先端技術センターの H.P.から）

2019 年 12 月 15 日