雑感　　複素数の大小

■　複素数の導入をした後，複素数に大小関係は定義できない（「複素数に大小はない」などと簡単に言ってしまうが）ことを強調する．

それにもかかわらず，2 次不等式 $x^2-2x+4<0$ の解が $1-\sqrt{3}i<x<1+\sqrt{3}i$ であるとする生徒は後を絶たない．

■　そこで，$2i$ と i の大小関係が決められるかどうかを，授業で触れ，印象を深めることにしている．

本来は数学 II の内容だが，今回は数学 III の複素数平面の授業の初めで取り上げてみた．

■　複素数でも大小関係が定義されているとし，$a>b,\ c>0$ のとき $ac>bc$；$a>b,\ c<0$ のとき $ac<bc$ が成り立つことを前提として，流れは大まかには次のようである．

「複素数には大小関係は定義できないということを，簡単な $2i$ と i で確認してみよう」

「$2i$ と i は異なるから，① $2i>i$　または　② $2i<i$　のいずれかが成り立つとしてみよう」

「①のとき，移項して $i>0$ だから，両辺に i を掛けても i が正の数だから不等号の向きは変わらないね．すると $i^2>0$ で $-1>0$ となってまずいことになる」

「では，②であるとして移項すれば $i<0$．この両辺に i を掛けると i が負だから不等号の向きが変わって $i^2>0$ となり，$-1>0$ となってこれもまずいことになる」

「したがって，①も②も成り立たないことになる」

■　さて翌々日，授業が終わったところで教卓に I 君がやってくる．

「先生，一昨日は $2i$ と i の大小関係の話だったんですけど，i と 1 の大小関係が決められないことを確かめようとしたんですが，うまく矛盾を導けなくて…」

私が「$2i$ と i の大小関係」としたのもこれが簡単だったからで，1 と i とかでは $2i$ と i の場合ほど簡単でなかったような記憶があった．

「なるほど，同じような方法で必ずしもうまくいくかどうか分からないね」と，時間もなかったので返答して済ませた．

こういったことを考えてみることは大事なことだ．

■　その質問が，頭の片隅にずっとあったが，雑事に紛れてそのままになっていた．

矛盾を導く方法は様々あるが，次の方法はどうか．

■　$1>i$ と仮定する．$1-i>0$ だから，これを $1>i$ の両辺に掛けると $1-i>i(1-i)=1+i$ となり，$i<0$ となるから，先に示したことに帰着し，$-1>0$ の矛盾が生じる．

$1<i$ と仮定する．$1-i<0$ だから，これを $1<i$ の両辺に掛けると $1-i<0$ より $1-i>i(1-i)=1+i$ となり，$i<0$ となるから，これも先に示したことに帰着し，$-1>0$ の矛盾が生じる．

■　なお，「演算」を考慮に入れなければ，複素数に順序関係は定義できる．このことは次に詳しい．

http://mathsoc.jp/publication/tushin/1501/1501iitaka.pdf

2013 年 12 月 23 日