雑感　カテナリー

■　数学 III で曲線の長さを扱うとき，パラメータ表示された関数でない場合には，カテナリーが教科書に例題として登場することが多い．

そもそも，曲線 $y=f(x)$ $(a \leqq x \leqq b)$ の長さ

$L=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ の積分計算が容易にできる関数が限られているから，扱われる関数も同じようなものになる．

■　曲線の長さの公式を導いた後，カテナリーの紹介をする．

そのとき，「この曲線は何でしょう？」と言って，チェーンの両端を持って垂らしてみせる．殆どの場合，「放物線」という返答がある．

「そうかな？」と言って，放物線を印刷した紙を黒板に貼り付け，それに沿わせるように垂らすと，ビミョーな誤差がある．

チェーンが手元にないときは，ゼムクリップを繋いで作れば十分に事足りる．

■　そこで「この曲線はカテナリー・懸垂線と呼ばれ，

$y=\dfrac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}})$ という形をしているんだ」と話を進める．

さらに，$y=a+\dfrac{x^2}{2a}+\dfrac{x^4}{24a^3}+\dfrac{x^6}{720a^5}+\cdots$ と表示でき，放物線とは異なるものだという紹介をする．

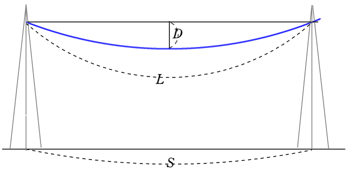
担当する生徒の状況に応じて，$a=1$ として話をすることも多い．

■　微分して公式に代入し，ルートが外せることが計算上の重要なポイントである．ルートのままだと，ルートの中が 1 次式とかでないと計算が辛い（あるいは，不定積分が求まらない）．

■　計算後，「電力会社や電気工事会社の人たちは，必要な送電線の長さをこうやって積分計算しているのかも知れないね」と話すと，「なるほど」という顔をする生徒も少なからずいる．

先日，このコラムの「働く数学のリアル」に書いたが，実際は放物線として扱って計算しているというから，何か残念な気がする．

■　確かに，図のような送電線があったとき，このカテナリーの方程式は D と S に対して，a の方程式



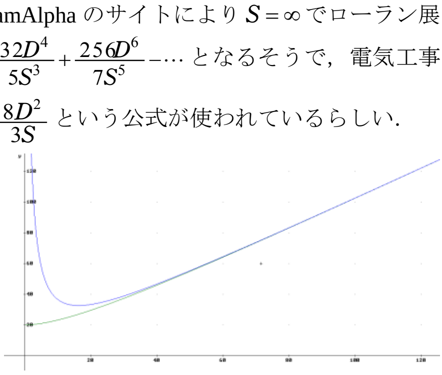
$\dfrac{a}{2}(e^{\frac{S}{2a}}+e^{-\frac{S}{2a}})-a=D$ の解で決まるが，この方程式を解くことは容易でない．

一方，これを放物線としてしまえば，$y=\dfrac{4D}{S^2}x^2$ と合同であることがただちに分かる．先のコラムでも触れたが，これで計算すると

$$L=2\int_0^{S/2}\sqrt{1+\left(\frac{8D}{S^2}x\right)^2}\,dx=\frac{\sqrt{16D^2+S^2}}{2}+\frac{S^2}{8D}\log\frac{\sqrt{16D^2+S^2}+4D}{S}$$

である．この式を WolframAlpha のサイトにより $S=\infty$ でローラン展開すると $L=S+\dfrac{8D^2}{3S}-\dfrac{32D^4}{5S^3}+\dfrac{256D^6}{7S^5}-\cdots$ となるそうで，電気工事士の試験では，$L=S+\dfrac{8D^2}{3S}$ という公式が使われているらしい．

この近似式の精度が気になったので，$D=10$ として 2 つのグラフをかいてみた．横軸が S であり，青(上側)が近似式である．



S の値が大きければ，誤差は殆ど無視できるという，何とも優れた近似式なのであった．

2015 年 9 月 14 日