雑感　「暴走」する Grapes

■　クロソイドという曲線がある．Wikipedia によれば「ドライバーがこの緩和曲線上を，車の速度を一定にし，ハンドルを一定の角速度で回したときに車が描く軌跡」である．

この曲線は，高速道路や遊園地のローラーコースターなどに使われている．

パラメータ表示は

$$x(t)=\int_0^t \frac{\cos\theta^2}{2}d\theta\ ,$$

$$y(t)=\int_0^t \frac{\sin\theta^2}{2}d\theta$$

である．

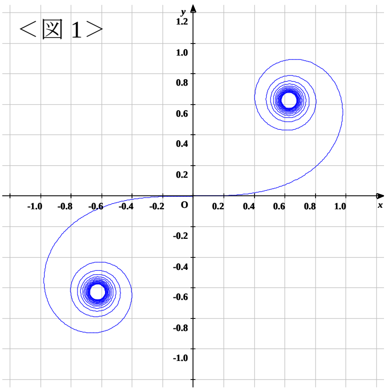
係数を簡単にして，以後

$$x(t)=\int_0^t \cos\theta^2 d\theta\ ,$$

$$y(t)=\int_0^t \sin\theta^2 d\theta$$

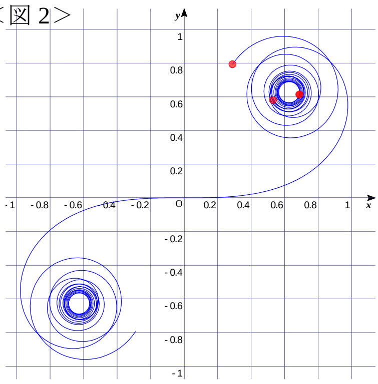
とする．

＜図 1＞



このグラフの概形は， $-10 \leqq t \leqq 10$ の範囲で右上＜図 1＞のようである．

＜図 2＞



■　さて，この曲線を描くために，Grapes を使ってみた．その結果が右＜図 2＞の通りである．

t が増加するに従い，曲線がどんどん小さな同心円的な図形を描いていくべきなのだが， $t=8$ を超えるあたりから「暴走」してしまうのだ．図の中の赤い点は左から $t=10,\ 9,\ 8$ に対応する点であると Grapes はしている．なお，パラメータの増分は 0.005 とした(0.001 とすると，グラフの一部しか表示されない)．

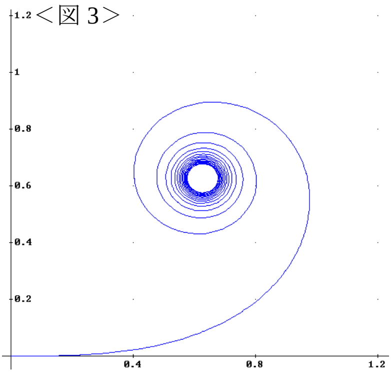
なお，http://www004.upp.so-net.ne.jp/s_honma/clothoid/clothoid.htm　によれば，この曲線は，

点 $\pm\left(\dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},\ \dfrac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\right)$

$=\pm(0.6266\cdots,0.6266\cdots)$ に収束するという．

それにしても，なぜこのような「暴走」が起きてしまうのか．

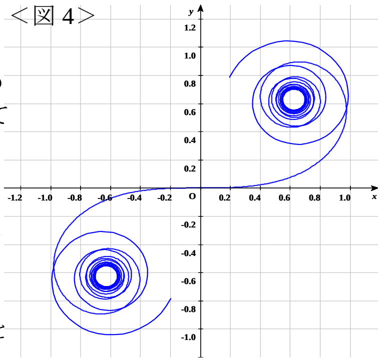
＜図 3＞



■　この $x(t),\ y(t)$ の定積分は初等関数表示できないのだが，数式処理ソフト DERIVE を用い，

$x(t)>0,\ y(t)>0$ の部分を描いたら，右上＜図 3＞の図のような美しいグラフを描いてくれた．

＜図 4＞



■　Function View でも描いてみたら，これも右＜図 4＞のように「暴走」してしまったのだ．

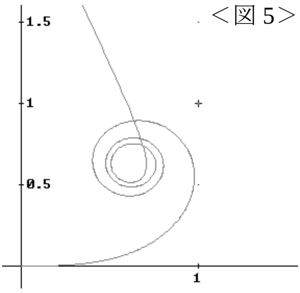
う～む．一体どうしたことだろう．

2012 年 6 月 2 日

そうだ．積分だ！　どうやって積分計算をしているんだろうか？

■　そこで，$\cos\theta^2$ と $\sin\theta^2$ を Taylor 展開してから積分して，グラフを DERIVE で描いてみたのが，右＜図 5＞である．

＜図 5＞



最初，Taylor 展開を 10 次位までで描いたら，暴走したので，100 次までとって $0 \leqq t \leqq 10$ の範囲としたが，$t = 4$ を超えるあたりから値が怪しくなり始める．

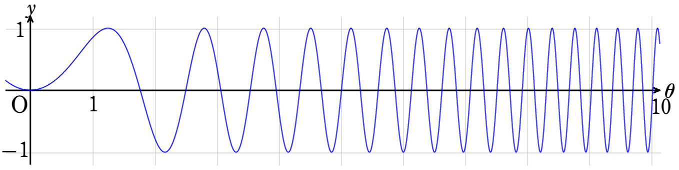
■　Grapes の積分計算の仕組みは分からなかったが，Function View は「シンプソンの公式で，積分区間を 30 に分割して計算する」ということが分かった．この分割数 30 がデフォルトで，もっと多い分割数にも指定できるとある．

t の値が大きくなれば積分範囲が広くなり，誤差が大きくなると言うのは必定である．なるほど．

そこで，分割数を 100 に増やしてグラフを描いたのが，最初の＜図 1＞のグラフである．

■　想像するに，Grapes の「暴走」も，シンプソンの公式の分割数に原因があったのだろう．

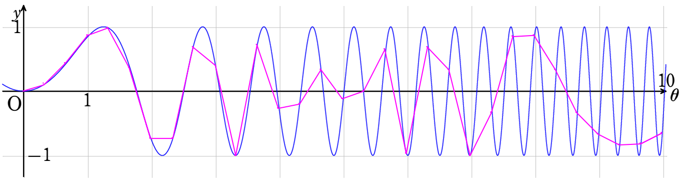
ちなみに，$y = \cos\theta^2$ のグラフは下のようである．



このように，正の値，負の値を交互にとっていく関数だけに，$0 \leqq \theta \leqq 3$ 程度の範囲を 30 分割して，各分割を放物線近似するならまだ精度が高いだろうが，$0 \leqq \theta \leqq 10$ もの範囲をたかが 30 分割して，各分割を放物線近似するのでは，誤差が大きくなっても不思議ではない．

実際，$0 \leqq \theta \leqq 10$ の範囲を 30 分割して，台形で“近似”した折れ線グラフが，下図のピンクのグラフである．これが青色のグラフの近似だなんて，どだい無理な話である．

暴走も宜（むべ）なるかなである．



■　なお，『曲線・グラフ総覧』（聖文社；1971）では，（同じ式で）漸近点の座標を $\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ とする間違ったグラフを載せている．

2012 年 6 月 2 日