## 雑感　２倍内角を持つ整数三角形

■　夏休みの補習の演習問題で，次のような問題に遭遇した．

> AB＝4，BC＝5，CA＝6 の△ABC がある．次を証明せよ．
> (1)　45°＜∠B＜60°　　　(2)　∠A＝2∠C
> (3)　40°＜∠C＜45°　　　　　　〔2012　広島大〕

(2)でビックリ！　暑さが一瞬にして失せた．
「え？　こんな三角形が存在するの？　すごい!!」
内角に $\theta$, $2\theta$ を持ち，しかも 3 辺とも整数だなんて…．良く見つけたなあ．こんな三角形，他にもあるのかな．

■　$C=\theta$, $A=2\theta$ となる△ABC について計算してみると，3 辺 $a$, $b$, $c$ の間に成り立つ関係式が分かり，3 辺とも互いに素な整数であるとき，$c$ が平方数であることが分かった．

実力考査にうってつけの問題である．整数問題は新カリで要注意問題であり，その意味でも面白い．ただ，私の担当が 2 年生であり，2 年生段階の出題は厳しいと考え，3 年生に提供したら，めでたく出題の運びとなった．

> △ABC について，$C=\theta$, $A=2\theta$ の関係があるとする．
> (1)　$b$ を $a$, $c$ で表せ．
> (2)　$a$, $b$, $c$ が互いに素な整数であるとき，$c$ は平方数であることを示せ．

■　3 年担当の O 氏による解答はおおむね以下の通りである（私の考えた方法と，基本的に同じである）．

＜解＞　(1)　$B=\pi-3\theta$，$\sin(\pi-3\theta)=\sin 3\theta$ であるから，正弦定理により，$\dfrac{a}{\sin 2\theta}=\dfrac{b}{\sin 3\theta}=\dfrac{c}{\sin\theta}=k$　とおける．

よって，$a=k\sin 2\theta=2k\sin\theta\cos\theta$　…　①

$b=k\sin 3\theta=k\sin 2\theta\cos\theta+k\cos 2\theta\sin\theta$　…　②

$c=k\sin\theta$　…　③

①，③より　$a=2c\cos\theta$．よって，$\cos\theta=\dfrac{a}{2c}$．

したがって，②より

$$b=(k\sin 2\theta)\cos\theta+(k\sin\theta)(2\cos^2\theta-1)$$

$$=a\cdot\frac{a}{2c}+c\left\{2\left(\frac{a}{2c}\right)^2-1\right\}=\frac{a^2}{c}-c\,.$$

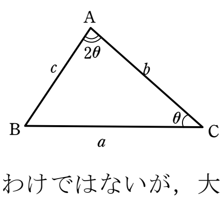
＜注：②は 3 倍角の公式を用いても良い＞

(2)　$c$ を素因数分解したとき，素数 $p$ を用いて $p^{2m-1}$　($m$ は自然数）という因数をもつとする．このとき，$\dfrac{a^2}{c}$ は整数であるから，$a$ も $p^n$（$n$ は自然数で，$n\geqq m$）という因数をもつ．$\dfrac{a^2}{c}$ を素因数分解したときの $p$ の指数は $2n-(2m-1)=2(n-m)+1\geqq 1$．

よって，$\dfrac{a^2}{c}$ は $p$ の倍数である．また，$c$ も $p$ の倍数なので $b$ も $p$ の倍数となる．これは，$a$, $b$, $c$ が互いに素であることに矛盾する．したがって，$c$ は平方数である．

■　さて，生徒の答案は…．

(1)では余弦定理を用いた者が少なくない．




$\cos\theta=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$，$\cos 2\theta=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

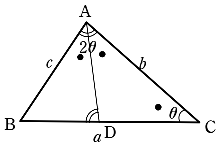
を $\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$ に代入する手がないわけではないが，大変な計算になる．試みに計算してみると

$(b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c^2+bc-a^2)=0$ となり，辺の長さの条件を考慮に入れれば正解にたどり着く．とは言え，この因数分解は容易でない．

ここでは，三角形の内角がすべて分かっていて，角の情報がふんだんにあるので正弦定理が便利である．

一方，図形的なアプローチも少なからずあって，これは見事である．

∠A の 2 等分線が辺 BC と交わる点を D とすれば，∠ADB＝$2\theta$ であるから，




△ABC∽△DBA で，$\mathrm{BD}=\dfrac{ac}{b+c}$ より

$c:\dfrac{ac}{b+c}=a:c$ が成り立つ．

これからすぐに $b=\dfrac{a^2}{c}-c$ を得る．

(2)はというと苦戦している．解答例のような正解もあったが，次のような「解答」もあった．

> $a^2=c(b+c)$ から，$a=\sqrt{c(b+c)}$ である．ここで，$b$, $c$ が互いに素であるから，$c$ と $b+c$ も互いに素である．したがって，$a$ が整数となるためには $c$ も $b+c$ も平方数でなければならない．したがって，$c$ は平方数である．

おっ，すごいぞと思ったのだが，間違いがある．それは，「$b$, $c$ が互いに素である」という点である．$a$, $b$, $c$ が互いに素であっても，$b$, $c$ が互いに素であるとは言えない（例を挙げるまでもなかろうが，$a=5$, $b=4$, $c=6$ のような場合である）．

しかし，この解答の<u>前に</u>次のことを付け加えれば正解になる．

> $b$, $c$ の最大公約数を $m$ とすると，$b=mb'$, $c=mc'$（$b'$ と $c'$ は互いに素な自然数）と表せる．このとき，$a=m\sqrt{c'(b'+c')}$ で，$c'(b'+c')$ は整数で，$a$ が整数であるから $\sqrt{c'(b'+c')}$ は整数であって，$a$ は $m$ の倍数である．$a$, $b$, $c$ が互いに素であるから $m=1$
> となり，$b$, $c$ が互いに素である．

■　$a=\sqrt{c(b+c)}$ で，$c$ も $b+c$ も平方数であることを利用すれば，このような三角形を次々と容易に作ることができる．

・$c=2^2=4$, $b+c=3^2=9$ とすると $b=5$ で $a=2\cdot 3=6$ となり，$(a,\ b,\ c)=(6,\ 5,\ 4)$ は最初の広島大の問題の設定である．

・$c=2^2=4$, $b+c=5^2=25$ とすると $b=21$ で $a=2\cdot 5=10$ となるが，$4+10<21$ からこれは三角形にならない．

・$c=3^2=9$, $b+c=4^2=16$ とすると $b=7$ で $a=3\cdot 4=12$ となり $(a,\ b,\ c)=(12,\ 7,\ 9)$ は条件を満たす三角形の辺である．

■　いずれにしても，楽しむことのできたなかなか面白い問題であった．

2014 年 9 月 09 日