雑感　ある問題作りから

■　関数について，定幅区間における最大値・最小値を求める問題がある．2 次関数でよく見かけるが，その場合，放物線が軸対称であることから，難しくはない．

3 次関数でこの内容を補習で扱うために，関数の設定に時間を割いた．その結果できあがった問題が，次の通りである．

> 関数 $f(x)=x^3-7x$ について，以下の問いに答えよ．
> (1)　$f(a)=f(a+1)$ となる定数 a の値を求めよ．
> (2)　$f(x)$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最小値を求めよ．

■　関数を $f(x)=x^3-kx$（$k>0$）とすると，このタイプの問題では，場合分けする a の値として，極小値をとる x の値 b，$b+1$，および方程式 $f(a)=f(a+1)$ の解が登場する．

極小値をとる x の値は比較的平易だが，$f(a)=f(a+1)$ の解は 2 次方程式の一般に面倒な解 $a=\dfrac{-3\pm\sqrt{3(4k-1)}}{6}$ である．

この値が「きれいな値」になるような，k の値を探す．

■　そのためには，$3(4k-1)=l^2$ となる自然数 l が存在すればよい．この左辺が 3 の倍数だから l は 3 の倍数であるから l も 3 の倍数である．したがって，$4k-1$ も 3 の倍数となる．そこで，$4k-1=3m$（m は自然数）とおくと，$4k-3m=1$ という不定方程式が得られる．

こういった方程式は，今後「新カリ」の数 A で重要なテーマとして取り扱われることになる．

$k=1,\ m=1$ が自明解なので，$4(k-1)=3(m-1)$ とでき，3 と 4 が互いに素であるから，$k-1=3p,\ m-1=4p$（p は整数）とおける．このとき，$l^2=3\{4(3p+1)-1\}=3^2(4p+1)$ であるから，結局，「$4p+1$ が平方数となる p を探す」ことに帰着した．

$4p+1$ が奇数であるから，$4p+1=(2n-1)^2$（n は整数）とおくと，$p=n(n-1)$ となる．

このとき，$k=3p+1=3n^2-3n+1$ であり，$f(a)=f(a+1)$ という方程式の解は，$a=n-1,\ -n$ である．

■　したがって，$f(x)=x^3-(3n^2-3n+1)x$ とすればよい．

$n=2$ のケースが上の問題である．

	$f(x)=x^3-(3n^2-3n+1)x$	$f(a)=f(a+1)$ の解
$n=1$	$f(x)=x^3-x$	$a=0,\ -1$
$n=2$	$f(x)=x^3-7x$	$a=1,\ -2$
$n=3$	$f(x)=x^3-19x$	$a=2,\ -3$
$n=4$	$f(x)=x^3-37x$	$a=3,\ -4$

■　ちなみに，上の問題を解くための図は次の通り．●で最小．