雑感　長さが計算可能な曲線

■　微分可能な関数 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分の弧の長さ l は
$l=\int_a^b \sqrt{1+\{f'(x)\}^2}\,dx$ で求められる．

この内容は従来，数学Ⅲなどで扱われていた内容だが，例の「ゆとり教育」のあおりを受けて，しばらく学習指導要領から消えた．これが，2012 年入学生から復活した．

ここでは，パラメータ表示された関数でない曲線 $y=f(x)$ の弧の長さに関して述べることにする．

■　この弧の長さを求めることができる曲線には限りがあり，適当な $f(x)$ で l を計算しようとしても，積分ができないことが多い．したがって，教科書や問題集などに登場する関数は，
$x\sqrt{x}$，$\log(x^2-1)$，$\log(\cos x)$，$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ など，限定的である．

また，計算が可能であっても，高校生には計算が大変で現実的でないという曲線もある．例えば，放物線 $y=x^2$ では
$\int \sqrt{1+4x^2}\,dx$ の計算が必要となるが，この積分は簡単ではなく，
試験に出そうとすれば，誘導で $x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\log(x+\sqrt{x^2+a^2})$ の導関数を求めさせるなどの工夫が必要である．

■　そこで，$\sqrt{1+\dfrac{1}{4}\left\{g(x)-\dfrac{1}{g(x)}\right\}^2}=\dfrac{1}{2}\left|g(x)+\dfrac{1}{g(x)}\right|$ であることを用いて，弧の長さを計算できる曲線を作り出してみたい．
$h(x)=\dfrac{1}{2}\left\{g(x)-\dfrac{1}{g(x)}\right\}$ とおくと，$h(x)$ が積分可能なら，
関数 $f(x)=\int h(x)dx$ の弧の長さ l を，$l=\int_a^b \dfrac{1}{2}\left|g(x)+\dfrac{1}{g(x)}\right|dx$
で求められることになる．

以上をまとめると，次のようになる．

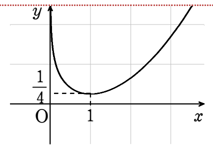
$f(x)$	l
$\int \dfrac{1}{2}\left\{g(x)-\dfrac{1}{g(x)}\right\}dx$	$\int_a^b \dfrac{1}{2}\left|g(x)+\dfrac{1}{g(x)}\right|dx$

■　$g(x)$，$f(x)$，$L(x)=\int \dfrac{1}{2}\left\{g(x)+\dfrac{1}{g(x)}\right\}$，$f(x)$ のグラフを列挙すると，次のようになる．

$g(x)=x$

$f(x)=\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{2}\log x$

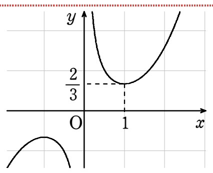
$L(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{2}\log x$



$g(x)=x^2$

$f(x)=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{2x}$

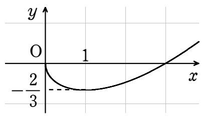
$L(x)=\dfrac{x^3}{6}-\dfrac{1}{2x}$



$g(x)=\sqrt{x}$

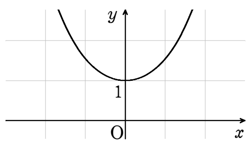
$f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{3}-\sqrt{x}$

$L(x)=\dfrac{x\sqrt{x}}{3}+\sqrt{x}$

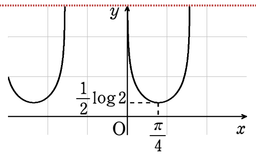


2013 年 3 月 20 日

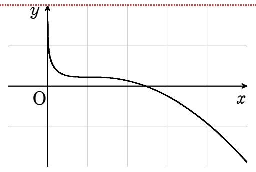
$g(x) = e^x$
$f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
$L(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$



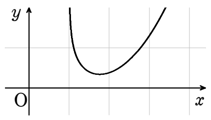
$g(x) = \tan x$
$f(x) = -\dfrac{1}{2}\log(\sin x \cos x)$
$L(x) = \dfrac{1}{2}\log(\tan x)$



$g(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{1+x^2}{\sqrt{x}} - \dfrac{x^2}{8}$
$L(x) = \dfrac{1}{2}\log(1+x^2)\sqrt{x} + \dfrac{x^2}{8}$



$g(x) = x\log x$
$f(x) = \dfrac{x^2}{4}\log x - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{1}{2}\log(\log x)$
$L(x) = \dfrac{x^2}{4}\log x - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{1}{2}\log(\log x)$



$g(x) = \sin x$，$\cos x$ などにしても弧長を求められる関数を作り出すことができるが，煩雑なため省いた．

後半の関数はともかく，前半の関数は計算も容易で，演習などにも使えるものである．