

## 雑感 スカイツリーと東京タワーが同じ高さに見える地点

■ やや人口に膾炙した話題だが、最後に新味があるはず。  
 数学Ⅱでアポロニウスの円を扱う授業を想定する。

■ 図1でPから2点A, Bは同じ高さに見えるよね。見上げる角度、何ていうんだっけ。そう、仰角だね。△AA'P≌△BB'Pで、仰角が同じだから、同じ高さに見える。こういう地点は、線分A'B'上にもあるよね。図2みたいに。もっとも、この場合は、左右180°見渡せるカメレオンみたいな目が必要だけど。

直線AB上にこだわらなければ、図3みたいな地点はたくさんあるはず。

このとき、 $AA' : BB' = PA' : PB'$ の関係があり、図2のPは線分ABをAA' : BB'に内分する点、図1のPは線分ABをAA' : BB'に外分する点だね。

図1

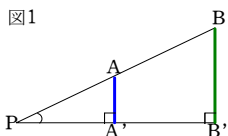


図2

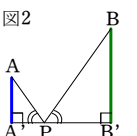
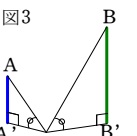


図3

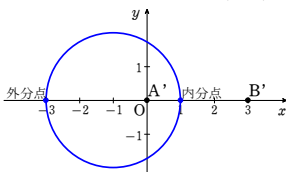


■ ということは、AA'が高さ333mの東京タワー、BB'が高さ634mの東京スカイツリーだとすると、この2つが同じ高さに見える場所があるんだね。これ、Eテレの2355でやっていたことがあるけど、観たことがある人はいるかな。(画像は、その番組から拝借) そのようなPはどこにあるか調べてみようか。



■ 話を単純化し、座標平面でA'がO(0, 0), B'(3, 0), AA'=1, BB'=2とするよ。すると、 $PA' : PB' = 1:2$ だから、 $2PB' = PA'$ の関係があるね。これを、 $P(x, y)$ とすると、 $2\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$ となって……、以下略。

この円をアポロニウスの円と言うんだけど、線分A'B'を1:2に内分する点と1:2に外分する点が確かに直径の両端になっているね。



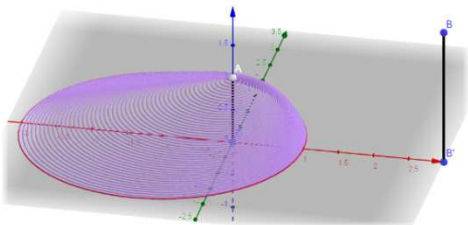
■ 同じように考えれば、東京タワー(地上の点をT'), 東京スカイツリー(地上の地点をS')だとすると、2つが同じ高さに見える場所は、線分S'T'を634 : 333に内分する点と外分する点を直径とする円周上の点ならどこでもよいことになるね。

Google Mapから描いてみたよ。この赤い円周上の地点からならば、2つは同じ高さに見えるんだ。ただし、円上の点がすべて標高0mとしての話だけだ。



■ ドローンがある一定の高さで飛んでいるとき、2つの塔が同じ高さに見えるところも同じように考えることができるけど、ドローンの高さによって、その高さからの塔の高さが違ってくるから、そこを考慮に入れれないといけないね。先ほどの単純化した話で、ドローンの高さが $k$  ( $0 \leq k < 1$ ) のとき、塔の高さがそれぞれ $2-k, 1-k$ であることに注意して考えてみれば良いね。

■ 実際にその曲面を描いてみると右のようになるよ。細かい層のような形で表示してあるけど、各層は全てアポロニウスの円で出来ているんだ。



高さを考慮すれば、赤い円の内部でも、2つの塔の高さが同じに見える場所が存在するという事だから、この円の内部に高層ビルを建て、その該当する階を「2つの塔が同じ高さに見えるフロア！」として売り出すことができそうだね。

■ このテーマ、文化祭の研究展示にできるよね。地図上に地元にある○○塔と○○城の模型を作って設置し、アポロニウスの円を描いて、スマホのカメラで円上の点から撮影すると同じ高さに見えるんだ。体験型の研究展示として高く評価されそうだね。高さを幾つか変えた場合にも対応できる様にするとか、実際の画像も撮影して紹介するとか、工夫の余地が沢山ありそうだよ。やってみたら？