雑感　場合分けせず解く絶対値つき不等式

■　絶対値記号のついた式を含む不等式は，その解法が煩わしく，好んで解こうとは思わない．

　絶対値記号が 1 個だけの場合は，機械的な公式処理で何とかなるので，最近はもっぱらその方法で解き，生徒への指導でも（絶対値記号を場合分けで外すとか，グラフを利用するなどのいくつかの方法を指導するものの）最終的には公式処理に行き着く．

■　具体例を挙げるまでもなかろうが，例えば $|x^2-x-3|<x+1$ では，機械的に $-(x+1)<x^2-x-3<x+1$ とし，連立不等式

$$\begin{cases} x^2-2>0 \\ x^2-2x-4<0 \end{cases}$$ を解き，

「$x<-\sqrt{2}$ または $\sqrt{2}<x$」かつ「$1-\sqrt{5}<x<1+\sqrt{5}$」から

$\sqrt{2}<x<1+\sqrt{5}$ が解であるとする．

■　ところが，絶対値記号を含む式が 2 つあるような場合は面倒で，参考書などではこういう場合は，「場合分けをして絶対値記号を外して解く」と書いてあることがほとんどである．

　しかし，機械的な公式処理ができない訳ではない．

■　例えば，$|2x-4|+|x+3|<x+6$ は，一般的には場合分けして次のように解かれることが多い．

$$左辺=\begin{cases} -3x+1 & (x<-3 のとき) \\ -x+7 & (-3\leqq x\leqq 2 のとき) \\ 3x-1 & (2<x のとき) \end{cases}$$

(i)　$x<-3$ のとき　$-3x+1<x+6$ を解いて $-\dfrac{5}{4}<x$ で，$x<-3$ であるから，解なし．

(ii)　$-3\leqq x\leqq 2$ のとき，$-x+7<x+6$ を解いて $\dfrac{1}{2}<x$ で，$-3\leqq x\leqq 2$ であるから，$\dfrac{1}{2}<x\leqq 2$．

(iii)　$2<x$ のとき，$3x-1<x+6$ を解いて $x<\dfrac{7}{2}$ で，$2<x$ であるから，$2<x<\dfrac{7}{2}$．

(i)(ii)(iii)から解は $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{2}$ となる．

■　これを次のように解くと，場合分けは必要ない．

　$|2x-4|<x+6-|x+3|$　であるから，

$-(x+6)+|x+3|<2x-4<x+6-|x+3|$　となり，

$$\begin{cases} |x+3|<3x+2 & \cdots\cdots ① \\ |x+3|<-x+10 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$ の連立不等式を解けばよい．

①から $-3x-2<x+3<3x+2$ で，$-\dfrac{5}{4}<x$ かつ $\dfrac{1}{2}<x$ より，$\dfrac{1}{2}<x$

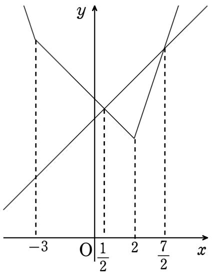
②から $x-10<x+3<-x+10$ で，$x<\dfrac{7}{2}$（$x-10<x+3$ は OK）

したがって，求める解は $\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{7}{2}$ である．

■　参考のために

$y=|2x-4|+|x+3|$，$y=x+6$

のグラフを図示すれば右の通りである．



■　大差がないと言って言えなくもないが，$|x^2-x-3|+|2x-3|<5-x$ などのように，場合分けの条件が複雑な場合は，この方法が平易であると思われる．ちなみに，この不等式の解は $1-\sqrt{6}<x<-1$，$1<x<2\sqrt{3}-1$ である．

2014 年 7 月 19 日