雑感　ABC 予想のメモ・再び

■　2017 年 12 月 16 日の朝刊第 1 面に，次のような記事（下にはリード文のみを載せた）が大きく載り，目が覚めた．

数学の超難問「ABC 予想」が、日本人によって証明される見通しになった。数学史に残る偉業だ。論文筆者である京都大数理解析研究所の望月新一教授（48）は、自身のホームページ（HP）以外での社会に向けた発信は限られ、それが一層関心を集めてきた。　（2017/12/16　朝日新聞）

■　実は，2012 年 9 月 19 日に次のような記事が載り，それに関して当雑感に「abc 予想のメモ」を残してある．
　この査読が（様々な困難と 5 年の歳月を経て）終わろうとしていると言うことなのだろう．
　内容の紹介としては，素人の私にはこれが精一杯なので，再掲する（一部加筆した）．

■　未解明だった数学の難問「ABC 予想」を、京都大数理解析研究所の望月新一教授（43）が解決した可能性があると英科学誌ネイチャーが報じた。望月教授は自身のウェブサイトで 500 ページにも及ぶ論文を公表した。ネイチャーによると、米スタンフォード大のブライアン・コンラッド教授は「膨大なため理解するのに時間がかかる」としている。

ABC 予想は整数論の難問。異なる整数 A と B を足して C になるとき、それぞれの素因数について成り立つ関係を示した理論。この理論を使えば、予想から約 350 年間解くことができなかった超難問「フェルマーの最終定理」も容易に解けるという。

望月教授は東京都出身。米プリンストン大数学科を 19 歳で卒業。92 年から京都大で研究している。2005 年には日本学士院学術奨励賞を受賞した。

シカゴ大学の加藤和也教授（整数論）は「相当に高度な方法を使っているので証明に時間がかかるが、正しければ、これまで未解決の様々な問題で研究の進歩が期待できる。20～30 年に一度の大発見となるインパクトがある」と話した。
（2012/09/19　朝日新聞）

■　$a,\ b,\ c$ は次を満たす正の整数とする．
(i)　$a,\ b,\ c$ は互いに素である
(ii)　$a<b$ である
(iii)　$a+b=c$ を満たす
　このとき，$\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)$ を $a,\ b,\ c$ の素因数の積と定義する．
たとえば，$\mathrm{rad}(4,\ 27,\ 31)=\mathrm{rad}(2^2,\ 3^3,\ 31)=2\cdot3\cdot31=186$ である．

■　多くの場合　$\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)>c$ であるが，
$\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)<c$ となる組 $(a,\ b,\ c)$ が存在する．
これを満たす組を「abc-triple」と定義する．
たとえば，$1+2^3=3^2$ で，$\mathrm{rad}(1,\ 2^3,\ 3^2)=2\cdot3=6<3^2$ であるから
$(1,\ 8,\ 9)$ は abc-triple である．
他に $(5,\ 27,\ 32)$ も abc-triple である．
こういった abc-triple は無数に存在する．
たとえば自然数 n に対して，$1+(64^n-1)=64^n$ が成り立ち

$$\mathrm{rad}(1,\ 64^n-1,\ 64^n)=\mathrm{rad}(1,\ 3^2\cdot7\cdot\sum_{k=0}^{n-1}64^k,\ 2)$$

$$=\mathrm{rad}(1,\ 3\cdot7\cdot\sum_{k=0}^{n-1}64^k,\ 2)<64^n$$ となるから，

$(1,\ 64^n-1,\ 64^n)$ は abc-triple である．

■　abc-triple は無数に存在するといっても，数は少なく $c<300$ の中には 15 個しかないという．

■　「abc予想」がどのような命題か不明*だが，次のような予想がある．

予想 1：　$c<\{\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)\}^2$ が成り立つ

　つまり，「abc-triple」が　$\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)<c$ を満たしたとしても，c は $\{\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)\}^2$ で押さえ込まれるのではないかということである．
　もちろん，abc-triple でない $(a,\ b,\ c)$ については
$c<\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)$ であるから，$c<\{\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)\}^2$ は当たり前のことである．

■　実際には $c<\mathrm{rad}(a,\ b,\ c)^k$ を満たす abc-triple で，現在見つかっている k が一番大きい値が約1.63 であるという．この話を発展させるために，次の値が定義される．

■　$q(a,\ b,\ c)=\dfrac{\log(c)}{\log(\mathrm{rad}(a,\ b,\ c))}$ と定義し，quality と呼ぶ．
abc-triple では $q>1$ である．
　この q に関して，次のような予想がある．

予想 2：任意の $\varepsilon>0$ に対しても，$q(a,\ b,\ c)>1+\varepsilon$ となる abc-triple は有限個である

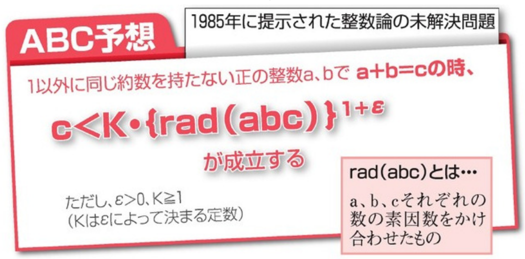
　この予想が今回証明されたらしい．

■　これがどのような形でフェルマーの定理の証明に結びつくのかは，おおよそ次の通りであり，簡明である．
　互いに素な自然数 $x,\ y,\ z$ が，ある自然数 n に対して
　$x<y$　かつ　$x^n+y^n=z^n$ を満たすとする．
　このとき，予想 1 と $x<z,\ y<z$ によって
　$z^n<\{\mathrm{rad}(x^n,\ y^n,\ z^n)\}^2=\{\mathrm{rad}(x,\ y,\ z)\}^2\leqq(xyz)^2<z^6$
で，$z>1$ から $n<6$ である．
　$n=3,\ 4,\ 5$ の場合はフェルマーの定理は証明済みだったので，これによって，証明が完了する（$n=3$ の場合は 1753 年オイラーによって，$n=4$ の場合は 1640 年にフェルマー自身によって，$n=5$ の場合はディリクレとルジャンドルによって 1820 年に証明されている）．

■　これを執筆するにあたって，以下のサイトを参考にさせていただいた．感謝して，ここに記す．
http://nazolab.net/notes/n/27
www.math.tohoku.ac.jp/~ytakao/papers/abc.pdf
（なお，2017/12/17 現在，上記のリンクは共に切れてしまっていると思われる）

　また，私の勝手な思いこみによる誤った記述が含まれているかも知れないので，ご注意いただきたい．

*　2017/12/16 朝日新聞には，次のようにある．



2017 年 12 月 17 日