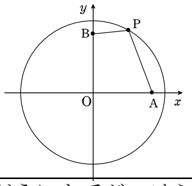
雑感　PA＋PB

■　鹿児島高専の白坂先生が高数研を主宰され，研究会を毎月開いている．その案内をいただくが，鹿児島はさすがに遠い．

その「案内と報告」には「宿題」が 2 題あって，興味深い問題が多い．案内には，前号の宿題に寄せられた「解答」が併せ綴じられていて，世の中にはこんなに鮮やかに問題を解いたり，問題の背景を見抜く視力の良い人がいるものだと感心させられることばかりだ．

■　11 月 17 日に発行された通巻 185 号の宿題の 1 つが次である．

> 原点を中心とする単位円があり，その第 1 象限部分の円弧上に点 P がある．
> a を，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<1$ なる定数とし，2 点 A $(a,\ 0)$，B $(0,\ a)$ をとる．AP＋BP を最小とする点 P の位置を決定せよ．
>
> 
>

（中点じゃないの，と思い単純計算したら，どうにも手がつけられませんでした．計算力も落ちたものです．ああ情けない！）という感想付きで．

■　興味を持って解き始めたら，果たせるかな，膨大な計算地獄に．

そこを頑張って数時間，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1-\sqrt{2a^2-1}}{2a},\ \dfrac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2a}\right)$ または

$\mathrm{P}\left(\dfrac{1+\sqrt{2a^2-1}}{2a},\ \dfrac{1-\sqrt{2a^2-1}}{2a}\right)$ にたどり着き，多分これが正解．

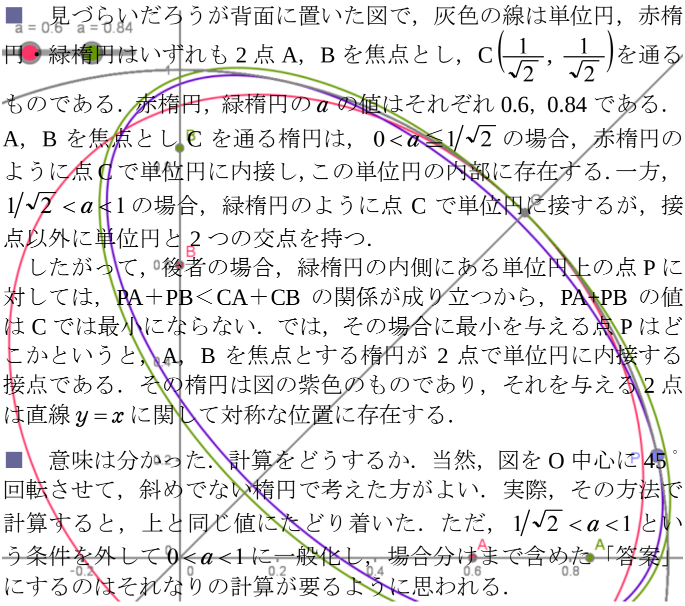
P $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ と置くメリットが余りなさそうだったので，

P $(x,\ \sqrt{1-x^2}\,)$ で PA+PB $=f(x)$ を計算し，$f'(x)=0$ となる x の値を 2 回平方して 4 次方程式を解くという力業である．4 次式の因数分解に手を焼き，平方による同値関係の崩れを見極める必要もあって….

■　ここで問題なのは $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a<1$ という条件はどこから来るのかである．実は，$0<a\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ では $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ で最小あり，白坂氏が最初に予想した点である．$0<a<1$ に一般化した場合，場合分けが必要になる問題である．

また，このような計算を白坂氏は期待してはいないはずである．これを解決する何かを思いつかれ，「宿題」とされたに違いない．

それは何かを考えねばなるまい．



■　見づらいだろうが背面に置いた図で，灰色の線は単位円，赤楕円・緑楕円はいずれも 2 点 A，B を焦点とし，$\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ を通るものである．赤楕円，緑楕円の a の値はそれぞれ 0.6，0.84 である．

A，B を焦点とし C を通る楕円は，$0<a\leqq 1/\sqrt{2}$ の場合，赤楕円のように点 C で単位円に内接し，この単位円の内部に存在する．一方，$1/\sqrt{2}<a<1$ の場合，緑楕円のように点 C で単位円に接するが，接点以外に単位円と 2 つの交点を持つ．

したがって，後者の場合，緑楕円の内側にある単位円上の点 P に対しては，PA＋PB＜CA＋CB の関係が成り立つから，PA+PB の値は C では最小にならない．では，その場合に最小を与える点 P はどこかというと，A，B を焦点とする楕円が 2 点で単位円に内接する接点である．その楕円は図の紫色のものであり，それを与える 2 点は直線 $y=x$ に関して対称な位置に存在する．

■　意味は分かった．計算をどうするか．当然，図を O 中心に 45° 回転させて，斜めでない楕円で考えた方がよい．実際，その方法で計算すると，上と同じ値にたどり着いた．ただ，$1/\sqrt{2}<a<1$ という条件を外して $0<a<1$ に一般化し，場合分けまで含めた「答案」にするのはそれなりの計算が要るように思われる．

■　実は $0<a<1$ とし，P が軸上でも OK として，PA＋PB の最大値も面白い．$a=\dfrac{1+5\sqrt{2}-\sqrt{10\sqrt{2}-13}}{8}\fallingdotseq 0.87529\cdots$ で場合分けされ，$f(0)=f(1)$ または $f(1/\sqrt{2})$ であるが，この場合分けの a の値がこのような形で複雑だが正確に求まることが驚きである．奥が深い．

■　186 号には諸賢によるどのような「解答」が載り，どのように白坂氏がコメントされるのか待ち遠しい．私の想定以上のスーパーソリューションで仰天させられるのだろうが．

2016 年 12 月 13 日