

雑感 GeoGebra とある連立漸化式

■ 過日の例のサイトの質問 : geogebra や wolfram alpha なんかでグモウスキー・ミラの写像は描けますか？よければ表示した画面も見せて欲しいです。

■ グモウスキー・ミラの写像？ なんだそれ？ で、さっそくググると、なんだかんだ言っても、Wikipediaにある。 [グモウスキー・ミラの写像 - Wikipedia](#) 詳細は上記に任せるが、次の連立漸化式で定義される写像が「グモウスキー・ミラの写像」として紹介されることが多いという。

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + \alpha y_n(1 - \sigma y_n^2) + \mu x_n + \frac{2(1 - \mu)x_n^2}{1 + x_n^2} \\ y_{n+1} = -x_n + \mu x_{n+1} + \frac{2(1 - \mu)x_{n+1}^2}{1 + x_{n+1}^2} \end{cases}$$

$\alpha = 0.008, \sigma = 0.05, \mu = -0.496$ のケースで、点 (x_n, y_n) を描写すると、右のようになると言い、神話の鳥と名前がついている。



■ さて、「GeoGebraで漸化式」というと、隣接2項間の線形の漸化式が収束するときの例のグラフくらいしか思いつかない。

その程度ならば、簡単に図示はできるのだが、この連立漸化式はそんなに軟ではない。

連立ではないが、フィボナッチ数列はGeoGebraではどのように項を求めて行ったらよいのだろうか。その方法に手掛かりがあるかも知れない。実は、GeoGebraの表計算を使えば、Excelなどと同様に、 $B3=B1+B2$ とし、そのセルをドラッグすることで、右のように容易に作成できる。

これから、点のプロットはどうするのだろうか。

まあ、とにかく (x_n, y_n) の列を作ってみよう。

	A	B
1	1	1
2	2	1
3	3	2
4	4	3
5	5	5
6	6	8
7	7	13
8	8	21
9	9	34
10	10	55
11	11	89
12	12	144
13	13	233
14	14	377
15	15	610

■ 定数 $\alpha = 0.008, \sigma = 0.05, \mu = -0.496$ を設定し、2つの関数

$$f(x, y) := y + \alpha y(1 - \sigma y^2) + \mu x + \frac{2(1 - \mu)x^2}{1 + x^2}, g(x, z) := -x + \mu z + \frac{2(1 - \mu)z^2}{1 + z^2}$$

を定義した。

$A1=1.1, B1=1.1$ を初期値として、 $A2=f(A1, B1), B2=g(A1, A2)$ とし、この2つのセルを選択してドラッグすると、右のような表ができた。これで、 (x_n, y_n) の列ができたことになる(とりあえず、 $n=100$ とした)。

	A	B	C
1	1.1	1.1	
2	2.2	0.29	
3	1.68	-0.83	
4	0.54	-1.27	
5	-0.86	1.16	
6	2.86	数値 B4 g(A3, A4)	
7	3.37	-1.78	
8	-0.72	-2	

さて、これらの点のプロットである。試しに選択部分を右クリックしてみると、

「作成」で「点のリスト」があるではないか(困ったときの右クリック!). これをクリックすると、グラフィックスビューに点が描写されたのである。点の色を変えたりして体裁を整えて、これで完成! と言いたいところなのだが…

■ 100個の点では、とてもWikiにあるような画像にはなりそうもないのだ。思い切って1,000個の点をとってプロットしたものが以下の通りだが、これでもとてもとても点が足りない。

GeoGebraの表計算で、何行まで可能なのかは知らないが、パソコンにかかる負担も大きく、フリーズしかけてしまう。

■ とは言え、GeoGebraで出来ないわけではなさそうだが、これだったらExcelの方が使い勝手が良いかもしれない。

■ なお、GeoGebraにはIterationという再帰関数があって、漸化式処理に使えるが、この例のように項数が多いと扱いが面倒であると思われる。

