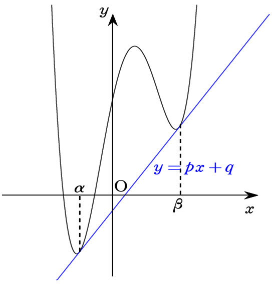
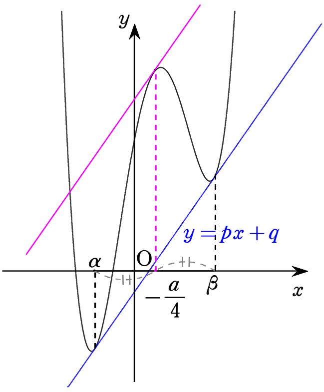
雑感　4 次関数・2 重接線のメモ満載

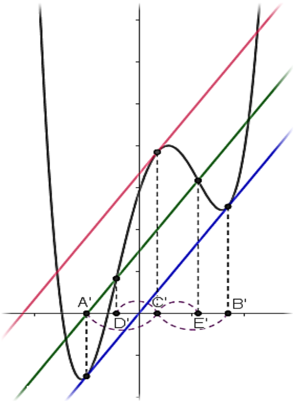
■　4 次関数のグラフの中には，右図のような 2 重接線(複接線)を持つものが存在する．簡単のため x^4 の係数を 1 とすると，右図の 4 次関数は $y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+px+q$　と表すことが出来て，その 2 重接線の方程式は $y=px+q$ である．



■　関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ が 2 重接線をもつとき，$f(x)$ が上のように変形できる．
$(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+px+q=x^4-2\ \alpha+\beta\ x^3+\ \alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2\ x^2-\ldots..$
なので，係数を比較して，$a=-2(\alpha+\beta)$, $b=\alpha^2+4\alpha\beta+\beta^2$ が成り立ち，$\alpha\beta=(4b-a^2)/8$ より，$\alpha,\ \beta$ は 2 次方程式 $8t^2+4at+4b-a^2=0$　の実数解である．したがって，このような実数 $\alpha,\ \beta$ が存在する条件は，判別式 >0 より $3a^2>8b$ である．$\alpha,\ \beta$ が $\dfrac{-a\pm\sqrt{3a^2-8b}}{4}$ であることからこの 2 つの値の相加平均は $-\dfrac{a}{4}$ である．点 $\left(-\dfrac{a}{4},\ f\left(-\dfrac{a}{4}\right)\right)$ における接線の傾きは p であり，2 重接線の傾きに等しい．なお，$f'''(-a/4)=0$ である．

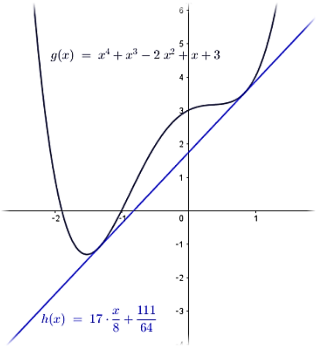


■　関数 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ が変曲点を持つ条件は，$f''(x)=12x^2+6ax+2b=0$ が異なる実数解を持つ条件に同値で，$3a^2>8b$ である．これは先に求めた 2 重接線が存在する条件に同じである．
計算は煩雑だが，(2 つの)変曲点をもつとき，それらを結ぶ直線は 2 重接線に平行である．
また，右図で，C'は線分 A'B'の中点，
A'C':D'C'=B'C':E'C'=$\sqrt{3}:1$ である．



■　$y=(x-\alpha)^2(x-\beta)^2+px+q$ とその 2 重接線 $y=px+q$ が囲む部分の面積は，部分積分で計算するのが容易であり，$S=\dfrac{|\beta-\alpha|^5}{30}$ となる．この面積は，直線 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$　によって 2 等分される．

■　以上を踏まえて，具体的な関数 $g(x)=x^4+x^3-2x^2+x+3$　の 2 重接線を求めてみる．
$g'(x)=4x^3+3x^2-4x+1$, $g''(x)=12x^2+6x-4$, $g'''(x)=24x+6$. $g'''(-1/4)=0$ で，
$g'(-1/4)=17/8$ であることから，方程式 $g'(x)-17/8=0$ は明らかに $x=-\dfrac{1}{4}$ を 1 つの解に持ち，$(4x+1)(8x^2+4x-9)/8=0$ より，2 重接線の接点の座標は $8x^2+4x-9=0$ の解である．
$g(x)-\left(x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{9}{8}\right)^2=\dfrac{17}{8}x+\dfrac{111}{64}$
となるから，2 重接線は $y=\dfrac{17}{8}x+\dfrac{111}{64}$ である．グラフは右図のようになっている．



ちなみに，　$g(x)=\left(x^2+\dfrac{x}{2}-\dfrac{9}{8}\right)^2+\dfrac{17}{8}x+\dfrac{111}{64}$ あるいは
$g(x)=\left(x+\dfrac{1+\sqrt{19}}{4}\right)^2\left(x+\dfrac{1-\sqrt{19}}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}x+\dfrac{111}{64}$　である．

2024 年 6 月 1 日