雑感　場合分けする 2 次関数の最大・最小 (1)

■　含まれる文字の値の範囲によって場合分けする 2 次関数の最大・最小問題は，高校 1 年生に立ちはだかる 1 つの大きな壁である．この壁を乗り越えられるかどうかは，彼らにとって「天国と地獄の差」なのだという．

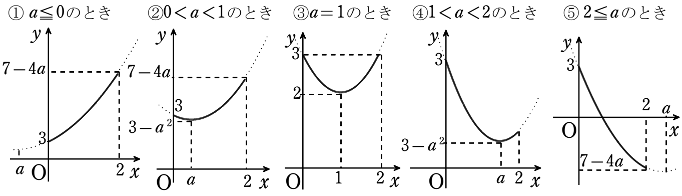
■　試験前には生徒からの質問も多い．ただ，指導者によって指導スタイルもまちまちなので，「授業でどのように習ったか」，「どのような解法で解けるようになりたいか」を生徒に聞いて，それにできるだけ沿った形で質問に答えている．

■　生徒が「分からない」というポイントはいくつかあるが，1 つは「(問題集などの解答の)**グラフはどうしてそのようになるのか**」であり，もう 1 つは場合分けの条件である「**○○のときはどこから出てくるのか**」に集約されるように思われる．

■　具体的な問題で話を進めよう．

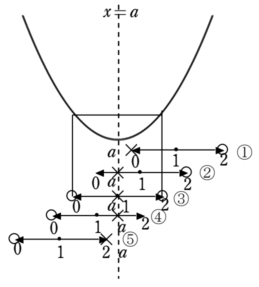
> 　$0 \leqq x \leqq 2$ における関数 $f(x)=x^2-2ax+3$ の最大値 $M(a)$，最小値 $m(a)$ を求めよ．

　$f(x)=(x-a)^2-a^2+3$ の変形の後，下に凸の放物線で軸が $x=a$，区間の中央の値が 2 であることを押さえて，5 つの場合の次のようなグラフが，解答に突然現れる．



　生徒の頭の中には？？？？？がいっぱいである．
疑問 1：なぜこんな 5 つの場合が出てくるのか？
疑問 2：「○○のとき」はどこから出てくるのか？
疑問 3：⑤だけなぜ，グラフが x 軸と共有点を持っているのか？
などなど…….
　このようなグラフがスッと描けるくらいなら苦労はいらない．まして，x 軸まできちんと描こうとすると，頂点の y 座標の符号まで気にかけなければならない．

■　この問題を指導する場合，私はグラフに x 軸は書かない．また，a の値の変化に対して，実際はグラフが変化するのだが，グラフを固定化し，範囲を相対的に動かすことにしている．
　さらに，手順としては上の③の「範囲で完全に左右対称になり，両端で最大になる」場合を真っ先に押さえている．
　グラフでいえば，次のようになる．



　まず③の場合を考え，次いで軸が区間に含まれているが，区間が右にずれている②，さらに区間が右にずれた①，その逆の④，⑤の区間を書き込む．
　そして，それらの区間に，最大を与える x には○を，最小を与える x には×を付していく．なお，区間の中点には・などの印をつけておく．
　これで，①の場合は $M(a)=f(2)$, $m(a)=f(0)$ などといったことが，たちどころに分かる．
　こうすれば，グラフは 1 つで済むし，x 軸との位置関係なども気にせずに処理ができる．
　さて，もう 1 つの「○○のとき」の場合分けの条件である．これは，各場合の区間に書き込まれた値の大小関係から，条件を取り出させる．②の場合でいえば，$0<a<1<2$ の場合だが，明らかな関係を除外して，「$0<a<1$ のとき」と出させている．