雑感　2024 の役に立たないメモ

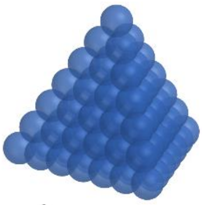
■　**2024**=2^3*11*23 であり，(3+1)(1+1)(1+1)=16 個の正の約数を持つ．

$\boxed{問}$：16 個の正の約数を持つ正の整数で最小の整数を求めよ．
[ちょっとした，テスト問題になりそうだが…．答 120]

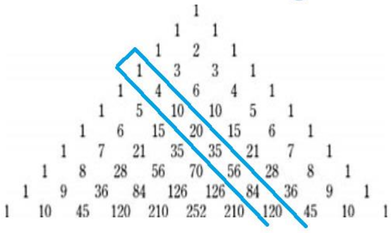
■　$\sum_{k=1}^{11} 2k^{2} = \mathbf{2024}$.

■　$2^3+3^3+....+9^3 = \mathbf{2024}$である．
$\sum_{k=1}^{9} k^3 = \left(\frac{9\cdot 10}{2}\right)^2 = 45^2 = 2025$ からすぐに分かる．

■　**2024** は第 22 番目の三角錐数である．三角錐数の一般項は
$a_n = n(n+1)(n+2)/6$ であり，a_{22}=22*23*24/6=**2024**.
$a_n = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j} k$で，$\sum_{k=1}^{j} k = j(j+1)/2$ を第 j 項に持つ数列が
1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ⋯ なので，この数列の 22 項分の和は
1+3+6+10+15+21+28+36+45+55+66+78+91+105+120+136+153+171
+190+210+231+253=**2024**
である．



よって，上から 1 段目 1 個，2 段目 3 個，3 段目 6 個，⋯，22 段目 253 個の合計 **2024** 個の同じサイズの球を積み上げて，正三角錐状の立体を作ることが可能である．この 22 段の図を描きたかったが，余りにも煩雑で挫折した．7 段の図（※）でご容赦のほどを．



この三角錐数は$a_n = \binom{n+2}{3}$なので，パスカルの三角形に，次の青い枠の様に現れる．その中の 1 つの値に注目すると，その右上の数から斜め上の数全体の和に等しくなっている．
2024 はこのパスカルの三角形で 25 段目に現れる．その段は次の通り．
1, 24, 276, **2024**, 10626, 42504, 134596, 346104, 735471, 1307504, 1961256, 2496144, 2704156, 2496144, 1961256, 1307504, 735471, 346104, 134596, 42504, 10626, **2024**, 276, 24, 1

■　$(a+b+c+d)^{21}$を展開して同類項をまとめると，**2024** 個の項が現れる．その全体を書くことは大変なのでもちろん書かない．

■　上の三角錐数の逆数 $1/a_n = 6/(n(n+1)(n+2))$について
$\boxed{問}$：(1) $1/a_{22}$ を求めよ．(2)$1/a_n =\ 3(1/((n+2)(n+1)) - 1/((n+1)n))$が成り立つことを示せ．(3) $\sum_{n=1}^{22} 1/a_n$を求めよ．(4) $\sum_{n=1}^{\infty} 1/a_n$ を求めよ．

■　11 個の連続整数の和 179+180+......+189=**2024**　である．
$a+(a+1)+(a+2)+\cdots+(a+n) =\ (n+1)(2a+n)/2 = 2024$
の正の整数解から他に，77+78+79+⋯+99=**2024**（23 個），
119+120+121+⋯+134=**2024**　（16 個）がある．

■　隣接 3 項間漸化式$a_n = 16a_{n-1} - a_{n-2}$,$a_1 = 1, a_2 = 8$によって定まる数列について，a_4=**2024** である．一般項は $a_n = \frac{(8+3\sqrt{7})^n + (8-3\sqrt{7})^n}{2}$.

■　**2024** 年はグレゴリオ暦で 2 月に 5 回の木曜日がある年（当然だが，閏年に限られる）．この前は 1996 年，この後は 2052 年である．

※　例によって，Geogebra の空間図形で描いたが，グラフィック，グリッドの「等距離」（isometric）がとても良い仕事をしてくれた．

2024 年 01 月 01 日