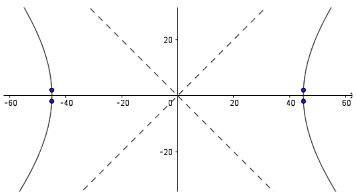
雑感　2021 の役に立たないメモ

■　新年早々の授業で，「ちょっと計算練習をしようか．今年は 2021 年だけど，$\mathbf{2021}^2$ と 1202^2 を計算してご覧．ちょっと面白いよ」はどうか？
$\mathbf{2021}^2 = 4084441$ だが，逆順で $1202^2 = 1444804$ と逆順となる！
こんなことが常には成り立たないのは，$23^2 = 529$，$32^2 = 1024$ とか．
「ついでに，**2021**×1202 も計算してみようか」．答：**2429242** で，回文数．

■　$45^2 - 2^2 = \mathbf{2021}$ であるから，直角双曲線 $x^2 - y^2 = \mathbf{2021}$ 上に格子点 $(\pm 45,\ \pm 2)$[複号任意]　が存在する．
他の格子点は $(\pm 1011,\ \pm 1010)$[複号任意]　であり，漸近線に極めて近い．



■　$93^6 - 1$ は **2021** で割り切れる．

■　13，6 から始めるフィボナッチ数列の第 13 項は **2021**.

■　「π の **2021** 桁目」＝「e の **2021** 桁目」＝「φ[黄金比]の **2021** 桁目」＝3.
これら 3 つの数の値が等しくなる桁数には，13，100，170，396，500，…などがある．100 や 500 というキリ番があるのが面白い．ちなみに 100 桁目は 7，500 桁目は 2.

■　**2021** を素因数分解すると 43･47 であり，2 素数の積である．このような整数は半素数と呼ばれる．**2021** は半素数を小さい順に並べたときの 581 番目である．なお，どうでも良いが 581 も 7･83 と素因数分解できて半素数．

■　2 つの素数の差が 2 である素数のペアは，双子素数と呼ばれる．また，2 つの素数の差が 4 である素数のペアはいとこ素数と呼ばれる．43，47 はいとこ素数なので，**2021** はいとこ素数の積からなる半素数である．
　いとこ素数の積からなる半素数を小さい順に並べると，
　21，77，221，437，1517，**2021**，4757，6557，…
となり，2021 はその 6 番目である．

■　連続する 2 つの素数の積からなる半素数を，小さい順に並べた数列において，**2021**（=43･47）は，その 14 番目である．

■　オイラーの有名な素数生成多項式 $\varphi(n) = n^2 + n + 41$ があり，$\varphi(0)$ から $\varphi(39)$ まで，すなわち 41，43，47，53，61，71，83，97，113，131，151，173，197，223，251，281，313，347，383，421，461，　503，547，593，641, 691, 743, 797, 853, 911 は全て素数である($\varphi(40) = 41^2$ は素数でない).
$\varphi(44)$ =**2021** であるから **2021** はこの多項式の値となるが，素数ではない．
なお，この多項式で生成される整数が素数でない(合成数の)とき，半素数が続くが，$\varphi(420)$ =176861=47･53･71　が半素数でない合成数に初めてなると思われる．

　なお，**2021** は $\varphi(n) = n^2 + n + 41$ によって生成された半素数からなる数列
1681，1763，**2021**，2491，3233，4331，…　の 3 番目になる．

■　隣り合う素数の和を小さいものから加えた和を考えるとき
$(2+3)+(3+5)+(5+7)+\cdots\cdots+(83+89)+(89+97)$ =**2021**.

■　素数を小さいものから順に 33 個加えた数 1988 に 33 を加えると **2021**.

■　**2021** 番目の素数は 17579 であり，17579+2021= 140^2.このような整数の最小値は 5 で，5 番目の素数 11 に 5 を加えると 4^2.

■　ペル方程式 $x^2 - \mathbf{2021}y^2 = 4$ は非自明解をもち，整数 n に対して例えば
$x = (45495 - 1012\sqrt{2021})^n + (45495 + 1012\sqrt{2021})^n$,
$$y = \pm\frac{(45495 - 1012\sqrt{2021})^n - (45495 + 1012\sqrt{2021})^n}{\sqrt{2021}}$$
が解である．
$n = 0$　のとき，$x = 2$，$y = 0$　（これは自明解）
$n = 1$ のとき，$x = 90990$，$y = \pm 2024$
$n = 2$ のとき，$x = 8279180098$，$y = \pm 184163760$
$n = 3$ のとき，$x = 753322597026030$，$y = \pm 16757060520376$
などが，このペル方程式の整数解である．

■　素数関連の話題が多くなってしまった．

2021 年 01 月 01 日