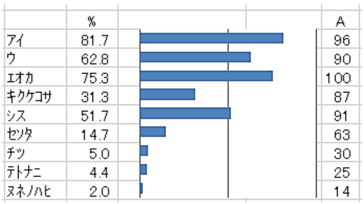
雑感　2019 センター「数列」の正答率

■　Benesse の『2019 年度大学入試センター試験徹底分析』を入手した．それを見ていて驚いたのは，IIB の第 3 問「数列」の正答率である．

後半になっての正答率の落ち込みが半端ない．

A 列は偏差値 60 以上の A 層の正答率だが，**チツ**以降，A 層でもこの状態であり，B 層では 1.3%以下，C 層では 0.5%以下の壊滅状態．



	%	A
アイ	81.7	96
ウ	62.8	90
エオカ	75.3	100
キクケコサ	31.3	87
シス	51.7	91
セソタ	14.7	63
チツ	5.0	30
テトナニ	4.4	25
ヌネノハヒ	2.0	14

■　問題は以下の通りである．

初項が 3，公比が 4 の等比数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。また，数列 $\{T_n\}$ は，初項が -1 であり，$\{T_n\}$ の階差数列が数列 $\{S_n\}$ であるような数列とする。

(1)　$S_2 = \boxed{アイ}$，$T_2 = \boxed{ウ}$ である。

(2)　$\{S_n\}$ と $\{T_n\}$ の一般項は，それぞれ

$$S_n = \boxed{エ}^{\boxed{オ}} - \boxed{カ}$$

$$T_n = \frac{\boxed{キ}^{\boxed{ク}}}{\boxed{ケ}} - n - \frac{\boxed{コ}}{\boxed{サ}}$$

である。ただし，$\boxed{オ}$ と $\boxed{ク}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つずつ選べ。同じものを選んでもよい。

⓪　$n-1$　　①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$n+3$

(3)　数列 $\{a_n\}$ は，初項が -3 であり，漸化式

$$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすとする。$\{a_n\}$ の一般項を求めよう。

そのために，$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ により定められる数列 $\{b_n\}$ を考える。$\{b_n\}$ の初項は $\boxed{シス}$ である。

$\{T_n\}$ は漸化式

$$T_{n+1} = \boxed{セ}\,T_n + \boxed{ソ}\,n + \boxed{タ} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすから，$\{b_n\}$ は漸化式

$$b_{n+1} = \boxed{チ}\,b_n + \boxed{ツ} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

を満たすことがわかる。よって，$\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = \boxed{テト} \cdot \boxed{チ}^{\boxed{ナ}} - \boxed{ニ}$$

である。ただし，$\boxed{ナ}$ については，当てはまるものを，次の⓪～④のうちから一つ選べ。

⓪　$n-1$　　①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$n+3$

したがって，$\{T_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項から $\{a_n\}$ の一般項を求めると

$$a_n = \frac{\boxed{ヌ}\left(\boxed{ネ}\,n + \boxed{ノ}\right)\boxed{チ}^{\boxed{ナ}} + \boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}}$$

である。

■　問題となるのは(3)の **セ** 以降である．

まず $\{T_n\}$ の漸化式を求めるのだが，一般項を求めた数列に対して，それが満たす「漸化式を作る」ことの目新しさがあったのかも知れない．漸化式は変形し，解く（一般項を求める）ものという方向で，これまで出題されることが多かったように思う．

さらに，直前に定義される $b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$ は関係なく，$T_n = \dfrac{4^n}{3} - n - \dfrac{4}{3}$ [(2)の**キ**～**サ**で求めた] だけから求めればよいのだが，直前に定義された「b_n か a_n を使う？」といった錯覚に捕らわれた受験生もいるだろう．

(2)の T_n の一般項の式に番号①を振り，「①から」と明瞭に誘導すれば，

$$T_{n+1} = \frac{4^{n+1}}{3} - n - \frac{4}{3} = 4\left(\frac{4^n}{3} - n - \frac{4}{3}\right) + 3n + 3 = 4T_n + 3n + 3$$

と導く流れは仮に目新しくも，ぐんと正答率が上がったはずだ．

■　**チツ**～を解くために必要な式を整理すると次の 3 式である．

$T_{n+1} = 4T_n + 3n + 3$，$na_{n+1} = 4(n+1)a_n + 8T_n$，$b_n = \dfrac{a_n + 2T_n}{n}$.

これらから，$\{b_n\}$ の漸化式を導けということである．

ここまで整理がつけば

$$b_{n+1} = \frac{1}{n+1}(a_{n+1} + 2T_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\left\{\frac{4(n+1)}{n}a_n + \frac{8}{n}T_n + 8T_n + 6n + 6\right\}$$

$$= \frac{4}{n}a_n + \frac{8}{n}T_n + 6 = 4\left(\frac{a_n + 2T_n}{n}\right) + 6 = 4b_n + 6$$

とできる．後は，$\{b_n\}$ の隣接 2 項間の漸化式を普通に解き，改めて(2)の**キ**～**サ**で求めた $T_n = \dfrac{4^n}{3} - n - \dfrac{4}{3}$ を使って，a_n が求まる．

とは言え，膨大な計算が必要で，広からぬ計算余白などを含めて，酷な設問であろう．こんな計算を強いられる受験生が何とも気の毒だ．

2019 年 08 月 15 日