雑感 **1/9091 二次曲面**

■ 「1/7 楕円と Midy の定理」が数学セミナー(2016 年 7 月号)の Note に載ったとき，3 次元への拡張として，「$\frac{1}{n}$ 楕円面」などの有心二次曲面が決定できるかも知れないとのご指摘をいただいた．

■ 私は Midy の定理にかかわらせて，$\frac{1}{n}$ の n は素数としてきているので，n を素数として話を進める．

■ 3 次元空間内の二次曲面 S はその方程式が 10 個の項を持つから，
$S: ax^2+by^2+cz^2+dxy+eyz+fzx+gx+hy+iz+j=0$ は一般に，どの 4 点も同一平面上にない 9 点によって確定する．

$\frac{1}{n}$ の循環節の長さが 10 であるものを探す．

$10^{10}-1$ が $9999999999=3^2\cdot 11\cdot 41\cdot 271\cdot 9091$ と素因数分解できることから，分母を素数とする単位分数で，循環節の長さが 10 となるものを探すと，$\frac{1}{9091}=0.00010999890001099989\cdots$ のみである．

ここで，この循環節から巡回的に 3 次元空間内の異なる 10 個の点
$A_0(0,0,0)$，$A_1(0,0,1)$，$A_2(0,1,0)$，$A_3(1,0,9)$，$A_4(0,9,9)$，$A_5(9,9,9)$，$A_6(9,9,8)$，$A_7(9,8,9)$，$A_8(8,9,0)$，$A_9(9,0,0)$ を作る．

■ これらのうち，原点 O(＝A_0)を除く 9 点を通るように S の方程式を $a=1$ として求めると，t を任意定数として

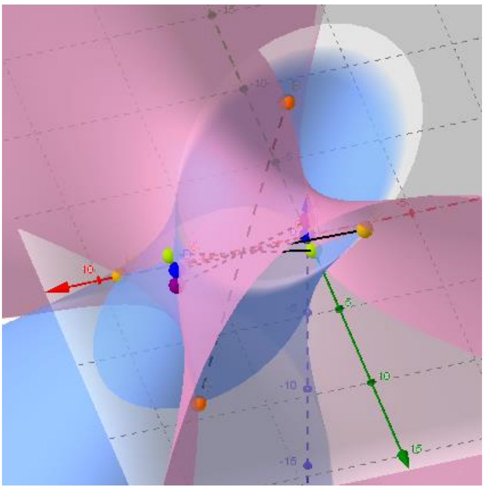
$$x^2+ty^2+\frac{1-t}{8}z^2-\frac{9t-1}{9}xy-\frac{7t+1}{9}yz+\frac{9t-1}{9}zx-9x-ty+\frac{t-1}{8}z=0$$

… ① となり，これが必ず O を通ることが分かる．

また，$a=0$ として求めると，

$$y^2-\frac{1}{8}z^2-xy-\frac{7}{9}yz+zx-y+\frac{1}{8}z=0$$ となり，同様である．

このように，「$\frac{1}{9091}$ 二次曲面」は無数にあり，確定しない．

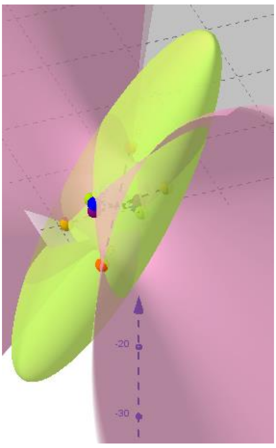


これらのうちの 2 曲面を描いてみた．

青が①で $t=1$ とした曲面，ピンクが①で $t=-0.5$ とした曲面で，ともに一葉双曲面である．

■ これらの 10 個の点は，A_i，A_{5+i} が点 B(4.5,4.5,4.5) に関して対称な位置にある（これは Midy の定理によるものである）．右図では，これらの点の組を同じ色で表示してある．また，それらを結ぶ 5 本の線分が 1 点(B)で交わっている様子がピンクの曲面の裏側に透けて見える．

点 B がこれらの二次曲面の中心になる．



■ 「$\frac{1}{9091}$ 二次曲面」が無数にあって確定しない理由は，例えば，4 点 A_1 と A_6；A_2 と A_7 をとると，これらの 4 点は点 B を含む 1 つの平面上に存在し，「どの 4 点も同一平面上にない 9 点」の条件を満たさないからである．

したがって，3 次元への拡張として，「$\frac{1}{n}$ 楕円面」などの有心二次曲面は存在するが，一意には決定できないということである．

■ なお，S は一葉双曲面以外になることもあり，上の①式で $t=0.2$ としたものは，右の薄緑色の楕円面である．

2016 年 8 月 1 日