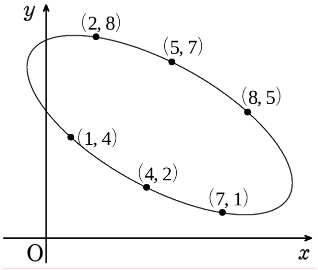
雑感　1/7 楕円

■　Wolfram　MathWorld の http://mathworld.wolfram.com/One-SeventhEllipse.html に，「$\frac{1}{7}$ 楕円」という興味深い記述を見つけたのは，昨年夏のことである．

$\frac{1}{7}$ は循環小数であり，その値は $0.142857142857\cdots = 0.\overline{142857}$ である．この長さ 6 の循環節 142857 の数字配列から，輪環的に座標を構成した異なる 6 点(1, 4), (4, 2), (2, 8), (8, 5),(5, 7), (7, 1) が，1 つの楕円上に存在するというのである（一般に 5 点で 2 次曲線は決まる）．



方程式は，$19x^2+36xy+41y^2-333x-531y+1638=0$ である．

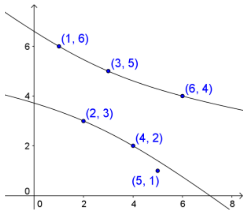
■　驚きである．単なる偶然と言うことはないはずだ．

このサイトには証明の紹介もないので，あれこれ考えてみた．

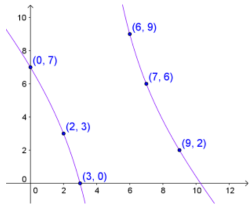
その結果，ある定理が関係していることが判明し，雑誌「数学セミナー」の Note に投稿したところ，この 7 月号に掲載となった．興味のある方は，是非ご覧いただきたい．

■　偶然か必然かの検証のために，幾つかの数字配列から同じような座標を構成し，それらが 2 次曲線上に存在するのかを調べてみたが，当然のことながら，一般的には No である．

例えば，巡回的な値を座標に持つ 6 点として，(1, 6), (6, 4), (4, 2), (2, 3), (3, 5), (5, 1)を考えてみると，右上のように最初の 5 点を通る双曲線上に，最後の点は存在しない．



しかし，$\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$であり，ここから輪環的に座標を構成した 6 点(0, 7), (7, 6), (6, 9), (9, 2),(2, 3),(3, 0)は 1 つの双曲線上に存在する．その方程式は$141x^2+134xy+9y^2-1872x-684y+4347=0$ である．



さしずめ，「$\frac{1}{13}$ 双曲線」であると投稿原稿に書いたが，この名称は Note で公認（笑）された．

■　どのような循環小数ならばこのようなことが起こるのかを調べた結果，$\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$の循環節を前後 3 つずつに分けてベクトルの成分としたとき，(1, 4, 2) と (8, 5, 7) の和が，(9, 9, 9) となっていることが関係していることが分かった．

上の×の場合は (1, 6, 4) + (2, 3, 5) = (3, 9, 10) であり，○の 1/13 双曲線の場合は，(0, 7, 6) + (9, 2, 3) = (9, 9, 9) である．

■　こういった性質が，$\frac{1}{p}$ (p が素数) の場合に成り立つという Midy の定理があり，それに関連することが判明したのだった．

> p を素数とする．$1/p$ が偶数の長さの循環節を持ち，$0.\overline{Q_1Q_2\cdots Q_jQ_{j+1}Q_{j+2}\cdots Q_{2j}}$ であるとき，
> $Q_i + Q_{j+i} = 9$ $(i = 1,\ 2,\ \cdots,\ j)$ が成り立つ．（Midy の定理 1936）

素数も関係しているなんて，まるで，「2 次曲線上の格子点，循環小数，素数」といった三題噺だ．

■　2 つのベクトルの和は (9, 9, 9) でなくとも，$(a,\ a,\ a)$ でよいことことなど，詳しくは「数学セミナー」をご覧いただくこととするが，投稿原稿には載せたが Note に載らなかったことがある．

このサイトに記載されたもう 1 つのタイプの楕円については，6 点 A_1(14, 28)，A_2 (42, 85)，A_3(28,　57)，A_4(85, 71)，A_5(57, 14)，A_6(71, 42)が 2 点ずつ，点 C(49.5, 49.5)に関して対称な位置にあって，これらの 6 点が点 C を中心とする 1 つの 2 次曲線（楕円）上に存在している．定理とは若干条件が異なるものの，同様な性質 (14,　42,　28) + (85,　57,　71) = (99,　99,　99) に基づくものである．

2016 年 6 月 17 日